Elektroakustika
osa3:
Digitaalse helisignaali filtreerimine

Digitaalne filtreerimine ja filtrite karakteristikud

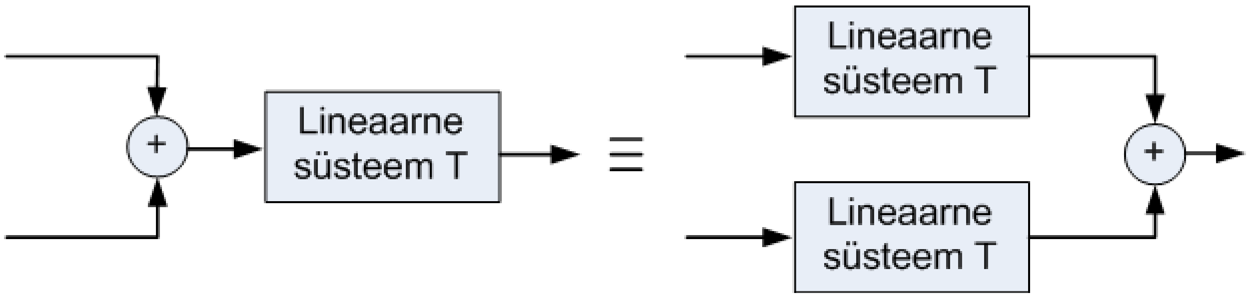
Kammfiltrid

Tasemefiltrid ja ekvalaiserid

Murdhilistusfiltrid

Lineaarsed filtrid: korrutiste summa

Süsteem (filter) on *lineaarne* kui see toimib samamoodi rakendades tervikule või osadele eraldi (*superpositsiooni printsiip*):



Üldjuhul helisignaalide töötlemisel on lineaarsus soovitav omadus

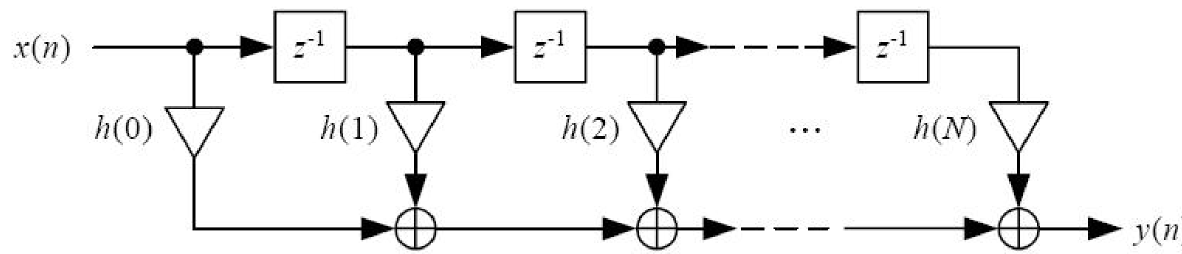
Lineaarseid filtreid on võimalik analüüsida ja disainida järgmisi karakteristikuid kasutades:

- Impulsskarakteristik: saadakse filtri väljundist kui sisse antakse üksik impulss
- Diferentsvõrrand: valem filtri realiseerimiseks
- Sageduskarakteristik: impulsskarakteristiku Fourier' teisendus; näitab kuidas filter päästab läbi eri sagedusega signaalikomponente
- Ülekandefunktsioon: impulsskarakteristiku Z-teisendus; abivahend filtri analüüsimisel ja disainimisel

Mitterekursiivsed ja rekursiivsed filtrid

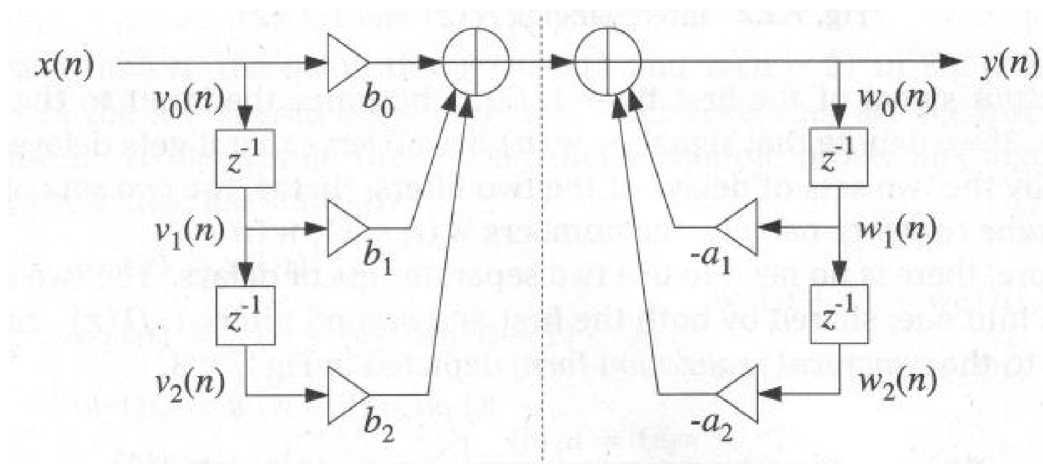
Lineaarsed filtrid jagatakse kahte rühma:

- mitterekursiivsed: filtri väljund on sisendsignaali väärtuste ja filtri kordajate korrutiste summa



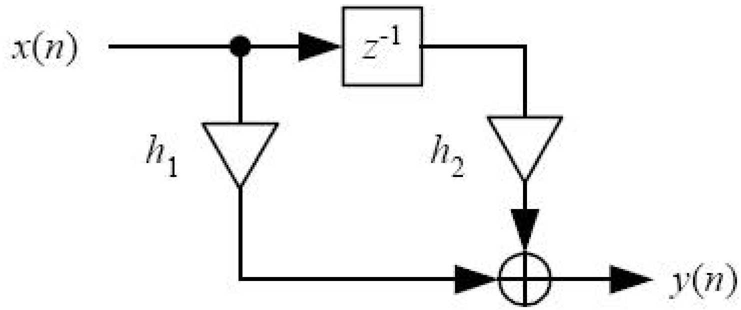
Selliste filtrite impulsskarakteristik on lõplik (FIR ehk *Finite Impulse Response*) -> kui sisend muutub nulliks, ka väljund muutub nulliks mõne aja möödudes

- rekursiivsed: filtri väljundi arvutamisel kasutatakse sisendväärtuste lisaks ka eelmisi väljundväärtusi



Esimest järku FIR-filter

Lihtsa esimest järku mitterekursiivse FIR-filtri võime esitada skeemina:



Selle filtri

- impulsskarakteristik koosneb kahest väärtusest [h_1, h_2]
- diferentsvõrrand on: $y(n) = h_1 x(n) + h_2 x(n-1)$
- ülekandefunktsioon on: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = h_1 + h_2 z^{-1}$
- sageduskarakteristik on: $H(\omega) = h_1 + h_2 e^{-j\omega}$

Esimest järku FIR-filter: näide

Valime näiteks: $h_1 = 1; h_2 = 0.99$

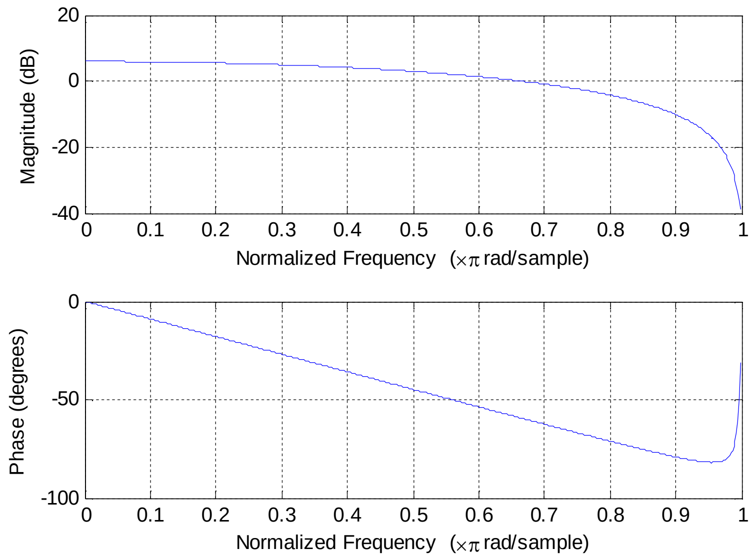
Sageduskarakteristik on $H(\omega) = 1 + 0.99e^{-j\omega}$

Sageduskarakteristik on üldjuhul kompleksne ja selle võib lahutada:

- amplituudikarakteristikuks: näitab kui palju mingi sageduskomponent sumbub
- fasasikarakteristikuks: näitab kui palju mingi sageduskomponent hilistub

Antud näite puhul amplituudikarakteristik on: $|H(\omega)| = |1 + 0.99e^{-j\omega}|$

Joonisel on ülemises aknas amplituudi-karakteristik (logaritmilises skaalas, sagedus on normaliseeritud)
ja alumises aknas faasikarakteristik

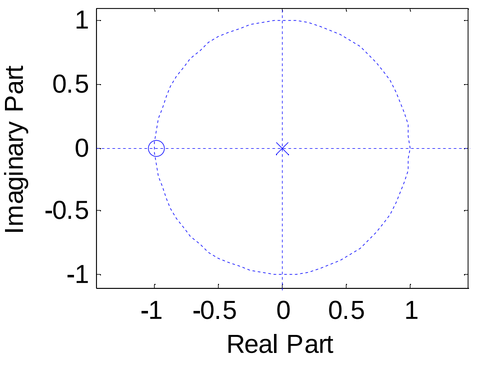


Filter summutab kõrgeid sagedusi
-> tegemist on madalpääsfiltriga

Ülekandefunktsiooni nullkohad

Lineaarsete filtrite analüüsil ja disainimisel on tihti otstarbekas jälgida filtri ülekandefunktsiooni nullkohtade paiknemist kompleksmuutuja tasandil. Ülekandefunktsiooni nullkohad on need muutuja z väärtused, mille puhul $H(z) = 0$.

Näitena olnud filtril on üks nullkoht kohas $z = -0.99$, mis paikneb komplekstasandi reaalteljel:

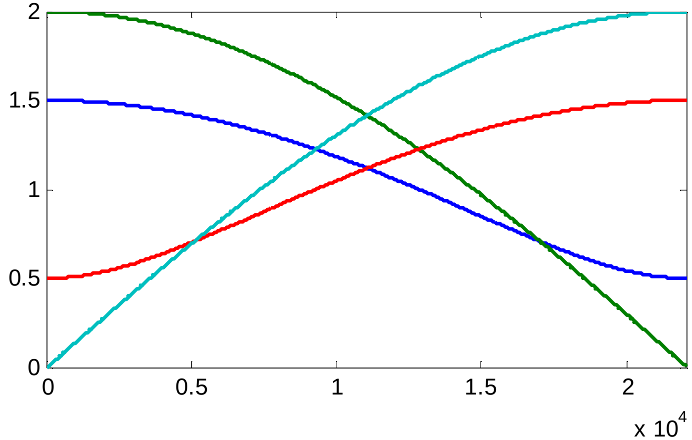


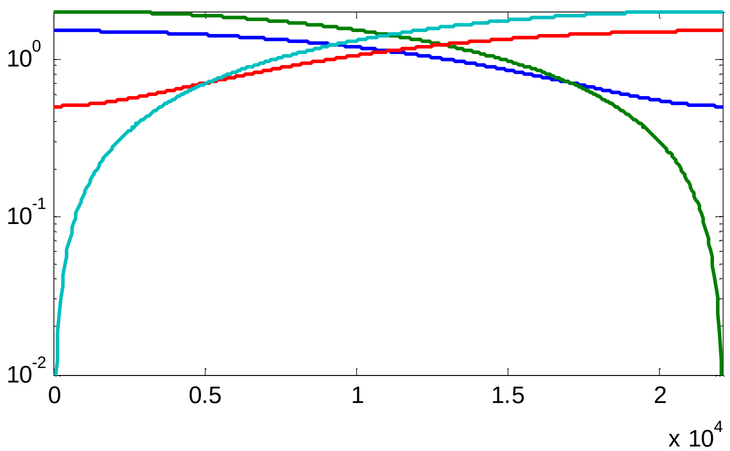
Komplekstasandi ühikring on sageduskarakteristiku sagedusteljeks.

Filtri nullkoha (ehk filtri *nulli*) asukoha nurk punkti (0, 0) suhtes vastab sagedusele. Mida lähemal on nullkoht ühikringile, seda rohkem filter summutab vastava sagedusega signaalikomponenti

Näiteid 1. järku FIR-filtrist

$h_1 = 1$, $h_2 = 0.5, 1, -0.5, -1$





Originaal:

h = [1 0.5]:

h = [1 1]:

h = [1 -0.5]:

h = [1 -1]:

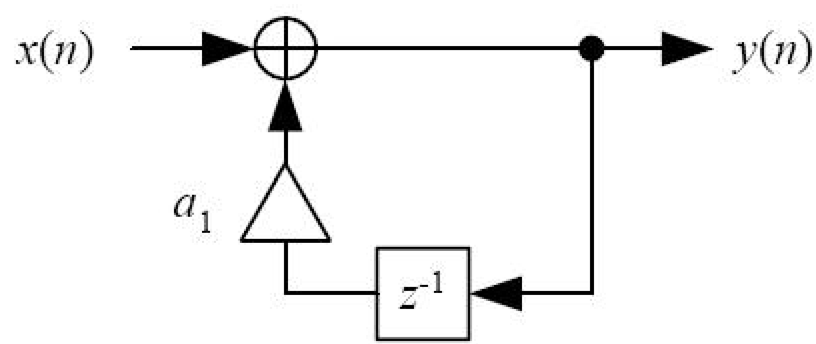
Rekursiivsed filtrid

Rekursiivsete filtrite impulsskarakteristik on üldjuhul lõpmatu kestvusega. Kui filter on stabiilne, siis praktiliselt impulsskarakteristik siiski ümardub nulliks mõne aja möödudes.

Väljundi arvutamisel kasutatakse eelmisi väljundväärtusi -> filtri skeemis on tagasisideahel.

Filtri ülekandefunktsioonil on nullide lisaks ka poolused

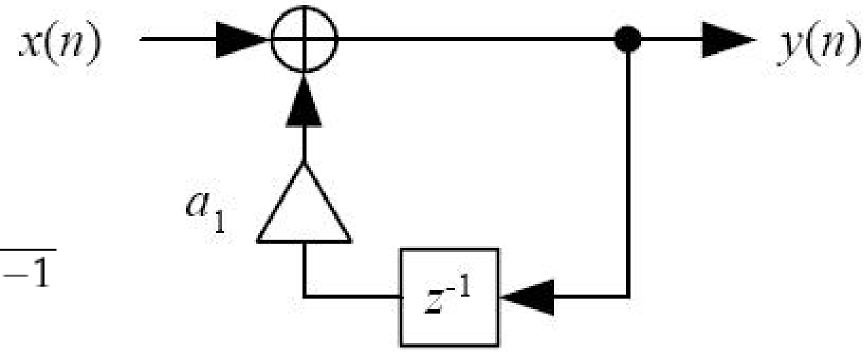
Näide: ühe poolusega rekursiivne filter:



Sellist filtrit kasutatakse ka praktiliselt audiosignaalide töötlemisel

Filter on stabiilne (s.t. väljund ei või kasvad lõpmatusse, filter ei või hakata genereerima) kui a_1 on absoluutväärtuselt väiksem kui 1

Ühe poolusega filtri karakteristikud



Diferentsvõrrand:

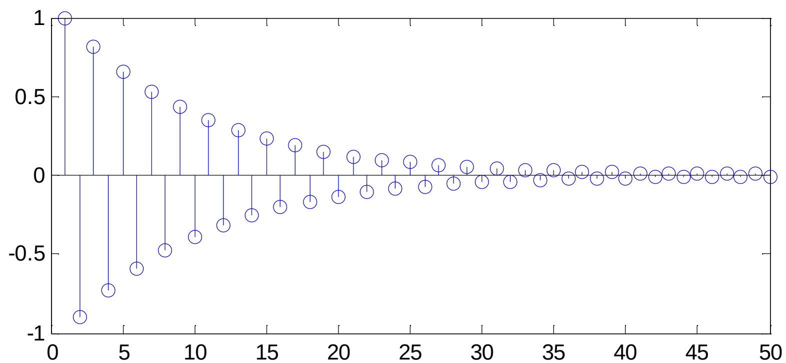
$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$$

Ülekandefunktsioon: $$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

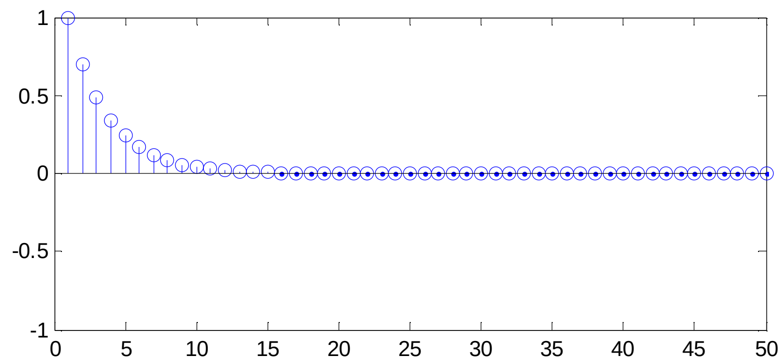
Sageduskarakteristik: $$H(\omega) = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega}}$$

Impulsskarakteristik:

$a_1 = -0.9$



$a_1 = 0.7$



Kui $a_1 < -1$ või $a_1 > 1$, filter muutub ebastabiilseks. Näiteks kui $a_1 = 2$, filtri impulsskarakteristik on *[1 2 4 8 16 32 …].*

Rekursiivsete filtrite poolused

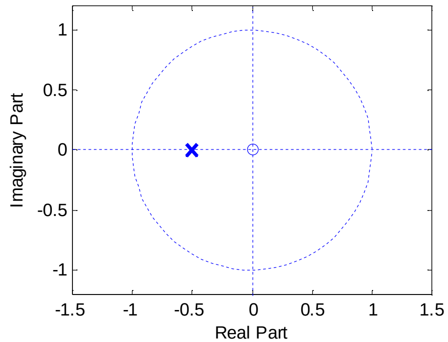
Amplituudikarakteristik on sageduskarakteristiku absoluutväärtus (magnituud):

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|1 - a_1 e^{-j\omega}|}$$

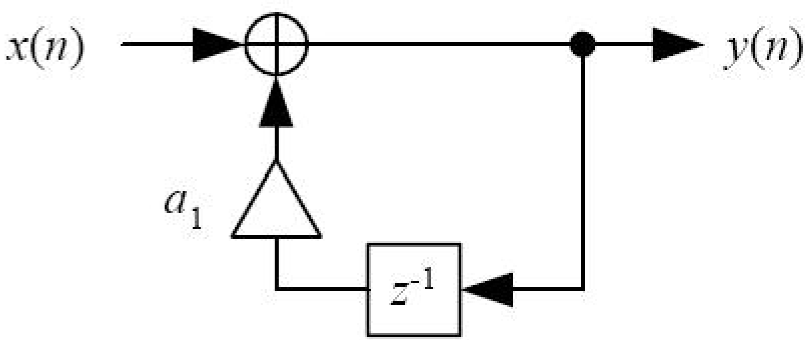
Filtri omaduste kirjeldamiseks on taas otstarbekas uurida süsteemifunktsiooni argumendi *z* väärtusi mille puhul ülekandefunktsioon on null või lõpmatu. Kui esimesi nimetatakse filtri nullideks, siis teisi nimetatakse poolusteks.

Ühe poolusega filtri ülekandefunktsiooni väärtus on lõpmatu siis kui murru $\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$ nimetaja on null ehk argumendi *z* väärtusel $z = a_1$.

Kui filtri null summutab siis filtri poolus võimendab vastava sagedusega signaalikomponenti (sageduse saame nulli/pooluse nurgast)

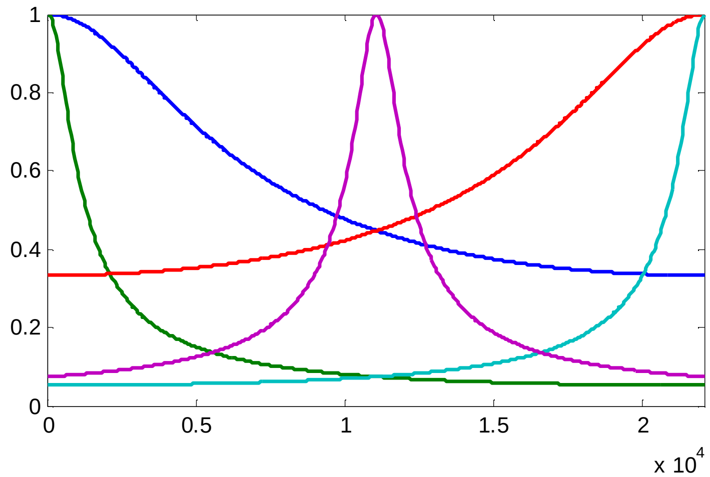


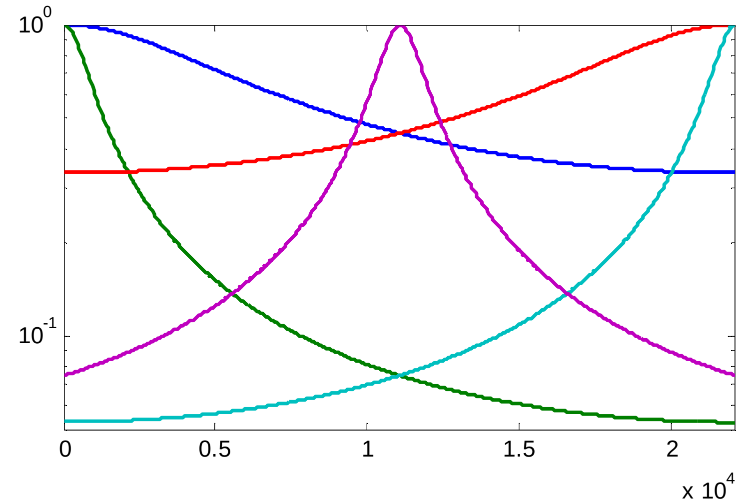
$a_1 = -0.5$



Näiteid 1. järku IIR-filtrist

$a_1 = 0.5, 0.9, -0.5, -0.9, 0.9e^{j\pi/2}$





Originaal:

$a_1 = 0.5$:

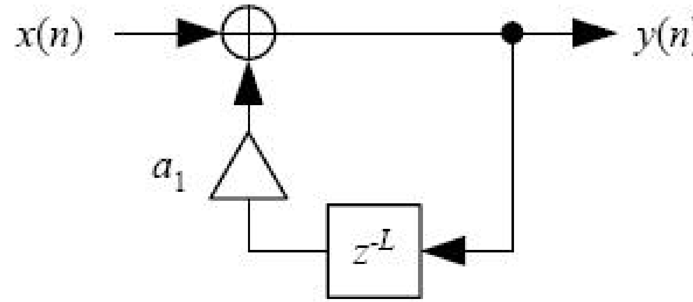
$a_1 = 0.9$:

$a_1 = -0.5$:

$a_1 = -0.9$:

$a_1 = 0.9e^{j\pi/2}$:

Kammfilter

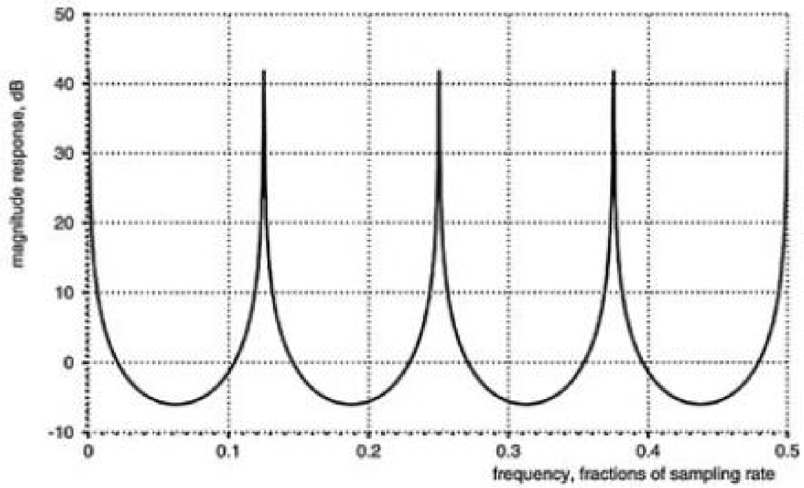


Kammfiltri saame kui asendame ühe poolusega filtris z^{-1} -> z^{-L}

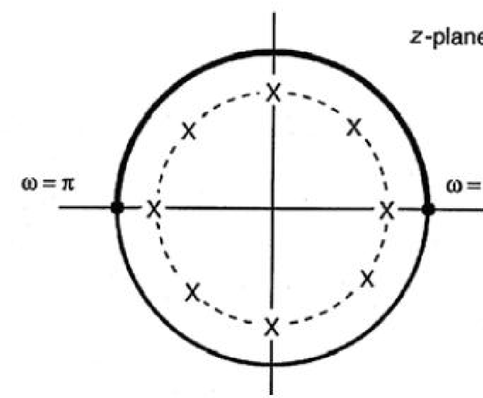
Diferentsvõrrand: $y(n) = x(n) + a_1 y(n-L)$

Näide:

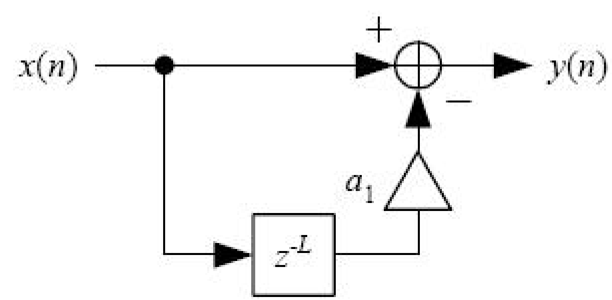
$a_1 = -0.999$, $L = 8$



Võrreldes 1. järku rekursiivse filtriga, kammfiltril on L poolust mis on jagunenud komplekstasandil võrdselt ringile

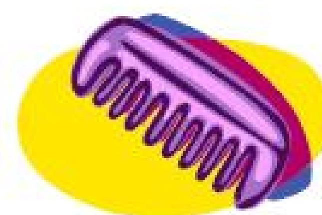


Pöörd-kammfilter

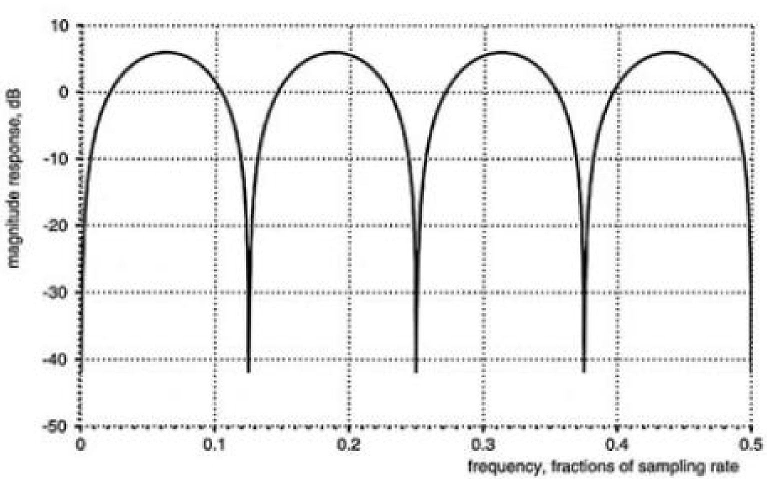


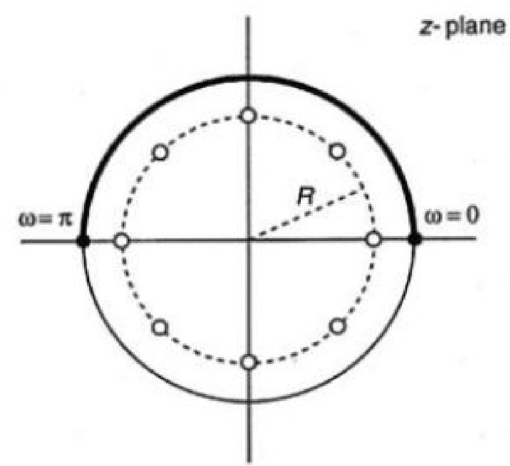
Kammfiltri amplituudikarakteritiku võime ‘poörata ringi’ kui kasutame mitterekursiivset struktuuri. Kammfiltri ja pöörd-kammfiltri ülekandefunktsioonid on teineteise pöördfunktsioonid

Diferentsvõrrand: $y(n) = x(n) - a_1 x(n-L)$



Näide:
$a_1 = -0.999,\ L = 8$





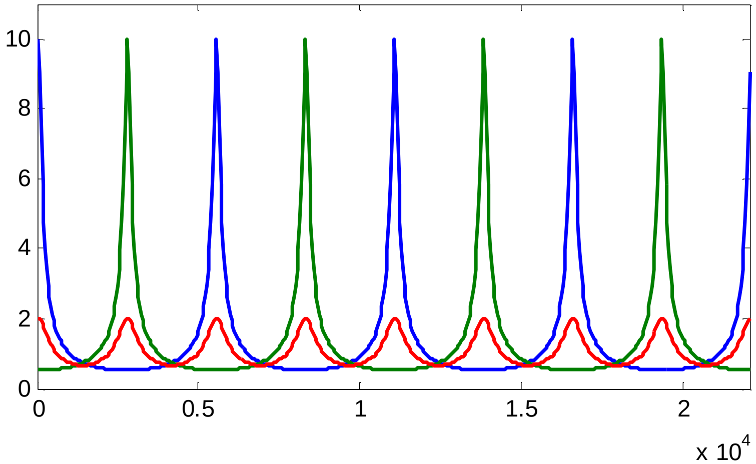
Näiteid kammfiltritest

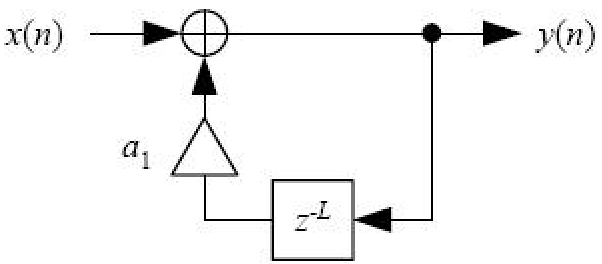
Kammfilter:

a_1 = 0.9, L = 8

a_1 = -0.9, L = 8

a_1 = 0.5, L = 16





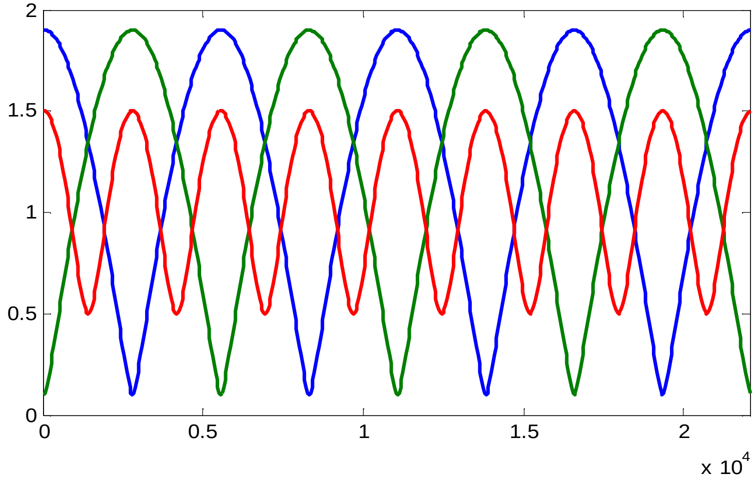
Pöörd-kammfilter:

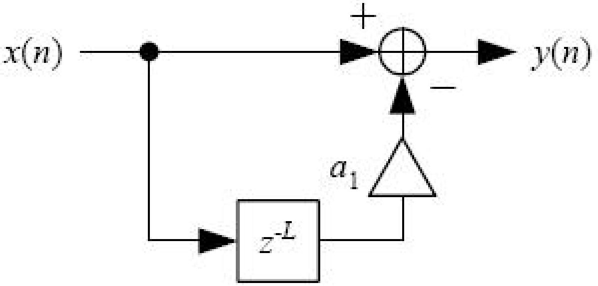
a_1 = 0.9, L = 8

a_1 = -0.9, L = 8

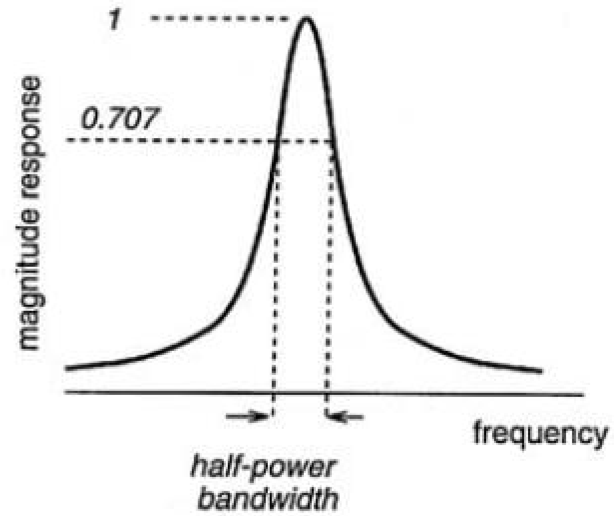
a_1 = 0.5, L = 16

fdatool





Resonantsfiltrid



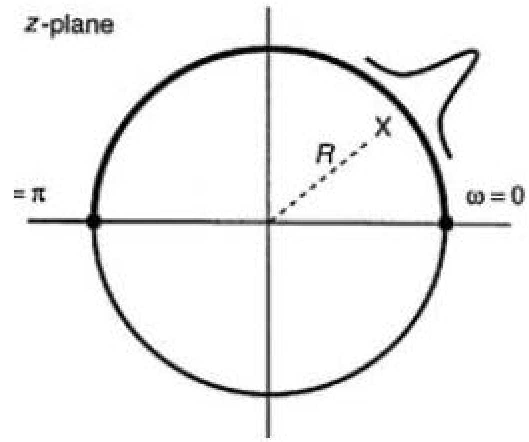
Resonantsfiltreid iseloomustatakse

- resonantssagedusega (läbilaskeriba kesksagedus)
- resonantsi tippväärtusega (võimendus)
- riba laiusega (defneeritakse -3dB kohal tippväärtusest)
- Q-väärtusega (kesksagedus / riba laius)

Lihtsa resonantsfiltri võib teha 1. järku IIR filtrist. Sel juhul

- pooluse raadiuse võib arvutada vajaliku riba laiuse järgi: $R \approx 1 - \frac{B}{2}$

  kus *B* on normaliseeritud nurksagedus



Näide:

diskrretimissagedus on 44100 Hz

riba laius on 20 Hz => $R \approx 1 - \pi \frac{20}{44100}$

Resonantsfiltrid (2)

Resonantsfiltrid on olulisel kohal mh. ekvalisaatorites ja helisignaali sünteesil.

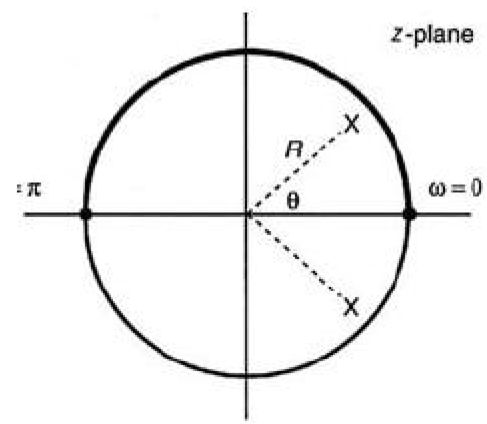
Praktikas on vaja kasutada kahe poolusega filtreid, et filtri kordajad oleksid reaalarvud. Poolused moodustavad sel juhul komplekskonjugaatpaari (s.t. neil on sama reaalosa kuid imaginaarosad on vastandarvud)

Resonantsfiltri ülekandefunktsioon on sel juhul:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - Re^{j\theta}z^{-1})(1 - Re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2R\cos\theta z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$

ja diferentsvõrrand vastavalt:

$$y(n) = x(n) + 2R\cos\theta y(n-1) - R^2 y(n-2)$$



Resonantsfiltri amplituudikarakteristik

Joonisel on 3 eri ribalaiusega 2. järku rekursiivse filtri abil realiseeritud resonants-filtrit. Amplituudikarakteristikud on skaalatud nii et resonantsi tippväärtus on 0 dB

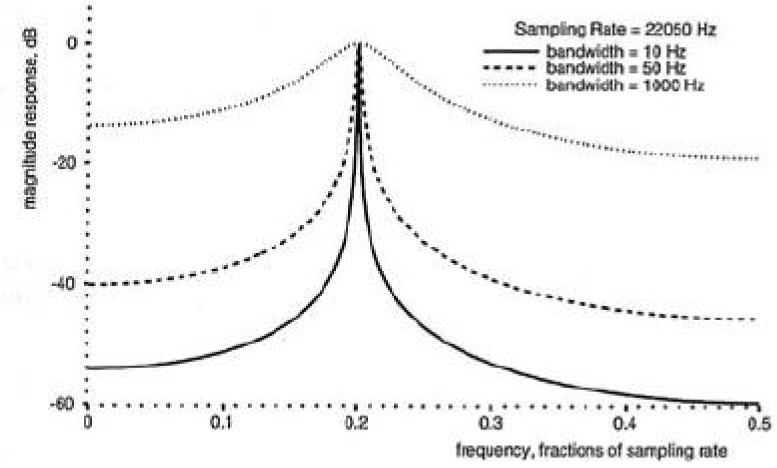


Fig. 4.3 Magnitude response of three resons, normalized so that the maximum gain is unity. The sampling rate is 22,050 Hz, all have the same center frequency of 4410 Hz, and the bandwidths are 10, 50, and 1000 Hz.

Taolise resonantsfiltri võib disainida riba kesksageduse ja riba laiuse põhjal eelpool toodud valemi järgi. See valem on siiski ebatäpne, eriti kui soovitud resonantsi sagedus on väga väike

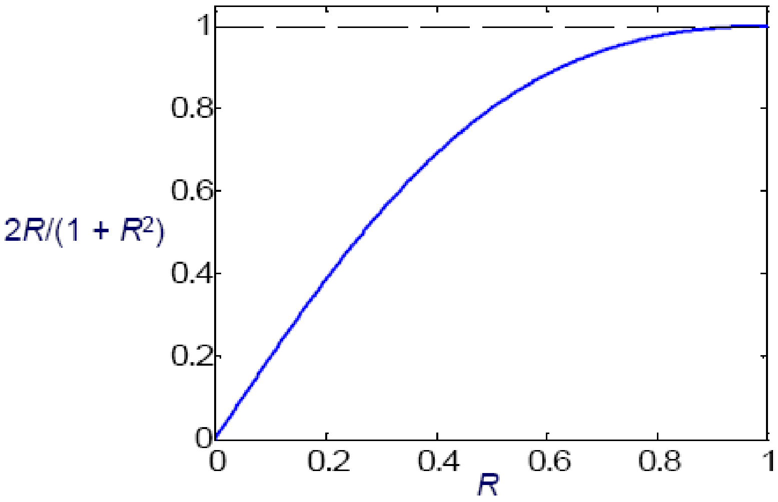
fdatool

Täpsem algoritm 2. järku resonantsfiltri jaoks

1) vali riba laius *B* ja resonantsi sagedus *w*
2) arvuta pooluse raadius: $R = 1 - B/2$
3) arvuta: $\cos\theta = \frac{2R}{(1+R^2)}\cos w$
4) arvuta: $A_0 = (1 - R^2)\sin\theta$
5) filtri diferentsvõrrand on nüüd:

$$y(n) = A_0 x(n) + 2R\cos\theta y(n-1) - R^2 y(n-2)$$

Täpsema algoritmi ja eelpooltoodud algoritmi vahel on nurksageduse korrektsioon:



Ken Steiglitz, *A Digital Signal Processing Primer with Applications to Digital Audio and Computer Music*, Addison-Wesley, 1996. Chapter 4–6, pp. 61–123.

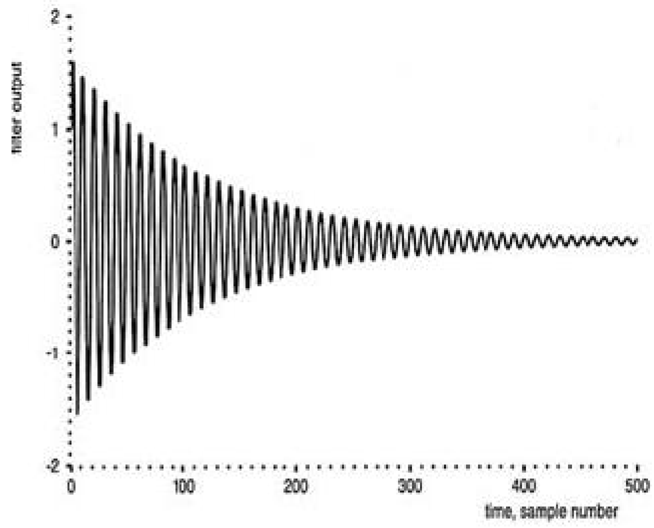
Resonantsfiltri impulsskarakteristik

Resonantsfiltri impulsskarakteritiku võime väljendada järgmiselt:

$$h(n) = \frac{R^n}{\sin\theta}\sin\left(\theta(n+1)\right)$$

Impulsskarakteristik kujutab endast sumbuvat resonanatsi

Kui *R* on väike, sumbumine toimub kiiresti
ja resonants on laia ribaga

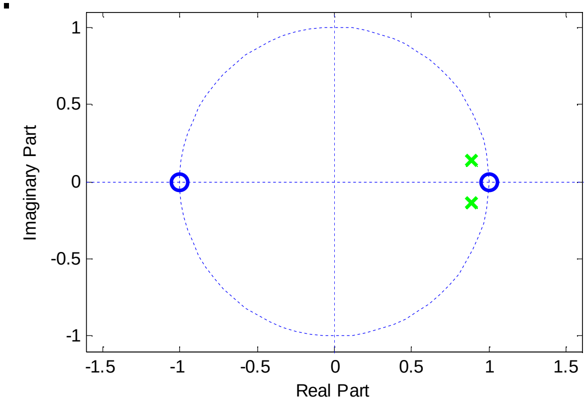


Resonantsfiltri nullkohad

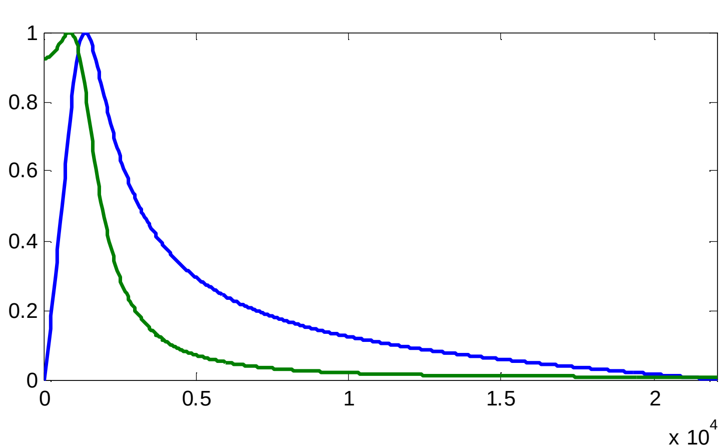
Et oleks võimalik saada kitsama ribaga madala kesksagedusega resonantsfiltreid, paigutatakse tihti nullid kohtadesse $z = 0$ ja $z = -1$.

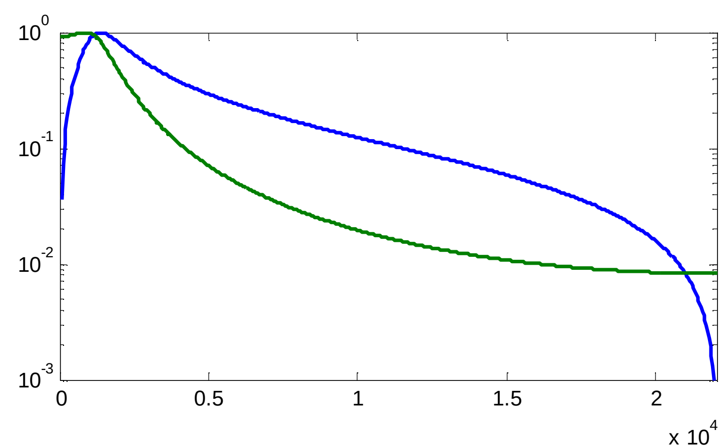
Taolise resonantsfiltri ülekandefunktsioon näeb välja:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2R\cos(\theta)z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$



Näiteid: ilma nullideta (roheline)
nullidega (sinine)
$R = 0.9$; $\theta = pi/20$



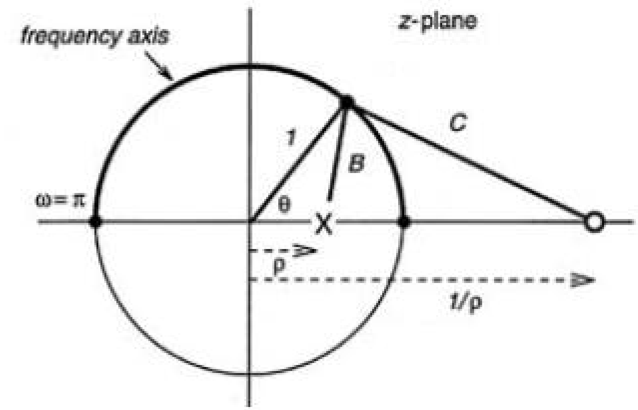


DEMO!

All-pass filtrid

All-pass filtriteks nimetatakse filtreid, mille amplituudikarakteristik on täpselt 1 kogu sagedusalal.

Sellise amplituudikarakteristiku saamiseks peavad nullid ja poolused paiknema samadel sagedustel aga vastandkaugustel 0-punkti suhtes.

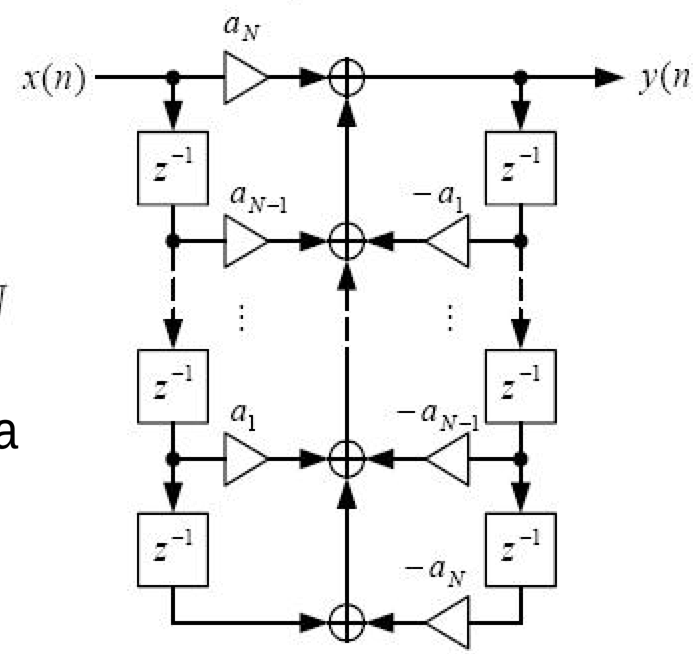


All-pass filtrite ülekandefunktsioon omab kuju:

$$A(z) = \frac{D(z^{-1})z^{-N}}{D(z)}$$

kus *D(z)* on:

$$D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}$$



Ülekandefunktsiooni lugejas ja nimetajas on seega kordajad vastupidises järjekorras

All-pass filtrite kasutusvaldkonnad

All-pass filtrite amplituudikarakteristik on 1: $H(\omega) \equiv 1$

All-pass filtrite rakendused põhinevad nende faasikarakteristikul, mille võib avaldada:

$$\angle A(e^{j\omega}) = \frac{\angle D(e^{j\omega})\angle e^{-jN\omega}}{\angle D(e^{-j\omega})} = 2\theta_D(e^{j\omega}) - N\omega$$

All-pass filtri faasikarakteristik on seega kahekordne nimetaja faasikarakteristik pluss *N*-diskreedine hilistus.

All-pass filtrid leiavad kasutust järgmistes rakendustes:

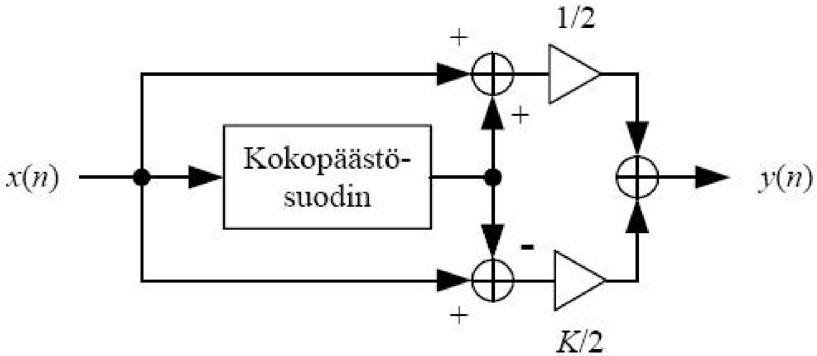
- ekvalaiserid *(equalizer)*
- *shelving equalizer*:id -> tasemefiltrid
- kajad
- muud efektid
- reguleeritavad filtrid
- helisüntees

Tasemefiltrid ja ekvalisaatorid

Tasemefiltrid võimaldavad kas tõsta või madaldada kõrgete või madalate sageduste nivood.

Ekvalisaatori abil on võimalik muuta audiosüsteemi amplituudikarakteristikut. Seda kasutatakse näiteks ruumi akustika parandamiseks ning mitmesugustes efektides.

Filtri struktuur mis töötab nii tasemefiltrina kui ekvalisaatorina, näeb välja:



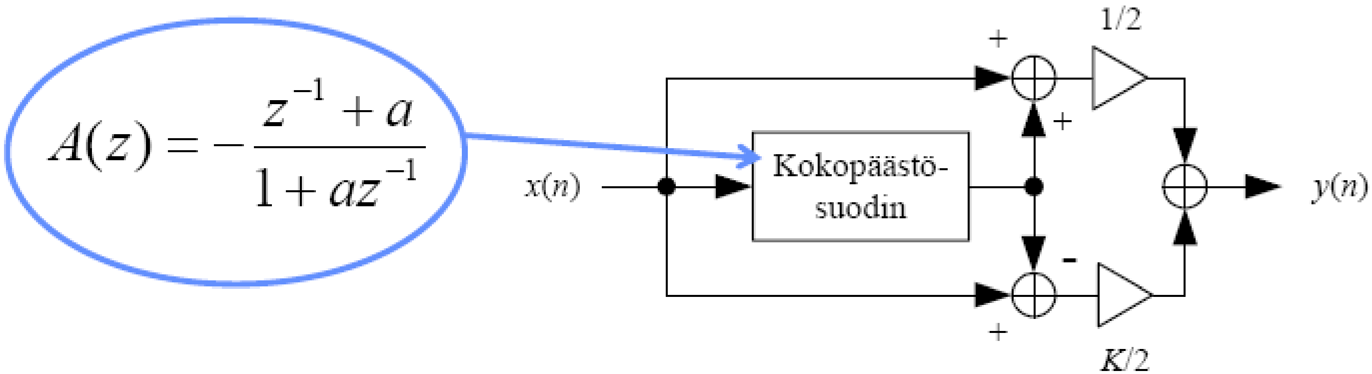
Selle leiutasid Regalia ja Mitra aastal 1987

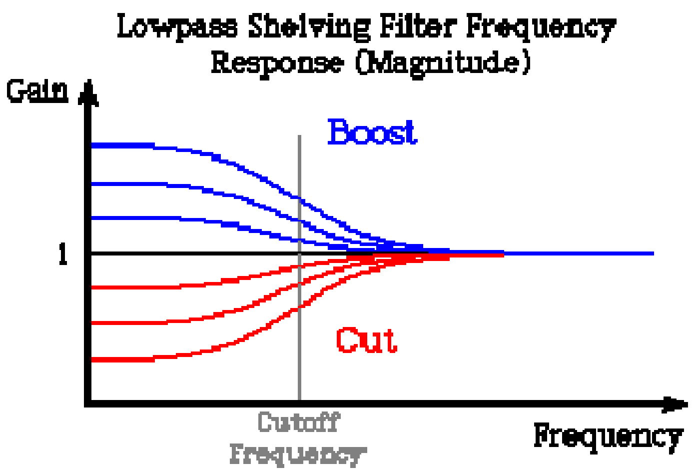
P. A. Regalia and S. K. Mitra, “Tunable digital frequency response equalization filters,” *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, no. 1, pp. 118–120, Jan. 1987.

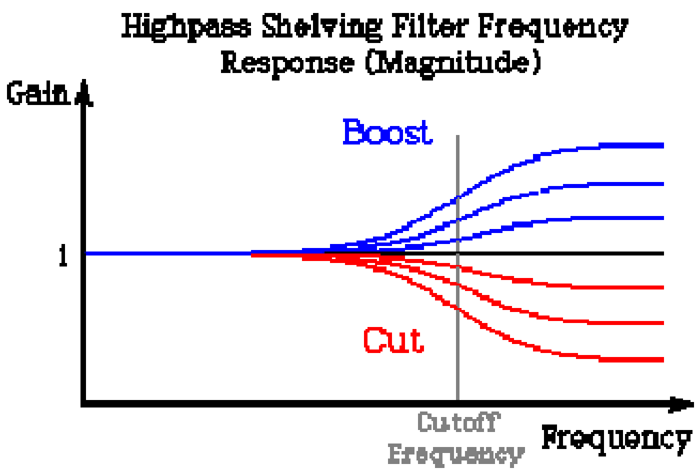
Tasemefiltrid

Tasemefiltri puhul *A(z)* on esimest järku *all-pass* filter

- parameeter *K* määrab ära taseme muutuse
- üleminekusagedus sõltub *all-pass* filtri faasikarakteristikust (kordajast *a*)







Ekvalisaator

Kui *A(z)* on teist järku *all-pass* filter, saame resonantsfiltri või pöörd-resonantsfiltri *(notch filter):*

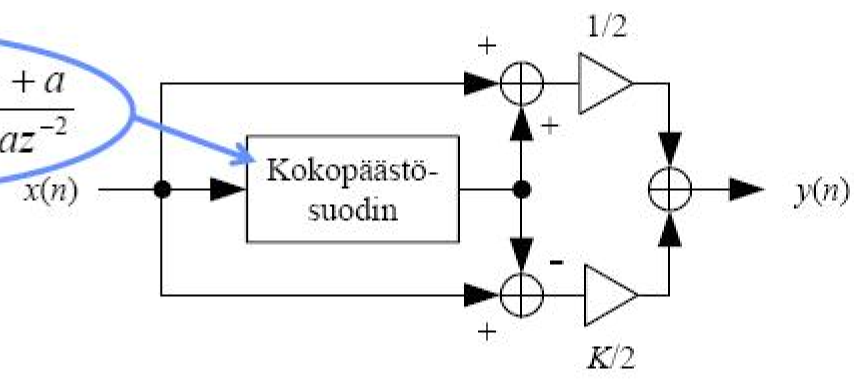
- filtri parameeter *a* määrab ära riba laiuse
- filtri parameeter *b* määrab ära kesksageduse
- filtri parameeter *K* reguleerib amplituudikarakteristiku tipu/nõgususe kõrguse/sügavuse

Kordajate leidmiseks on olemas järgmised valemid:

$$a = \begin{cases} \dfrac{1-\tan\left(\Omega/2\right)}{1+\tan\left(\Omega/2\right)}, \text{when } K \geq 1 \\[2ex] \dfrac{K-\tan\left(\Omega/2\right)}{K+\tan\left(\Omega/2\right)}, \text{when } K < 1 \end{cases}, \text{where } \Omega \text{ is normalized} -3 \text{ dB bandwidth and } K \text{ is gain}$$

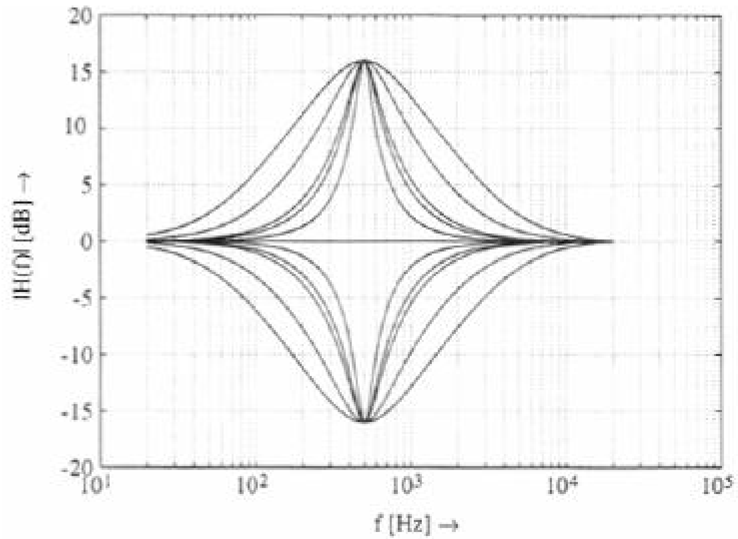
$$b = -\cos(\omega_0), \text{where } \omega_0 \text{ is the normalized center frequency}$$

$$A(z) = -\frac{z^{-2} + b(1+a)z^{-1} + a}{1 + b(1+a)z^{-1} + az^{-2}}$$

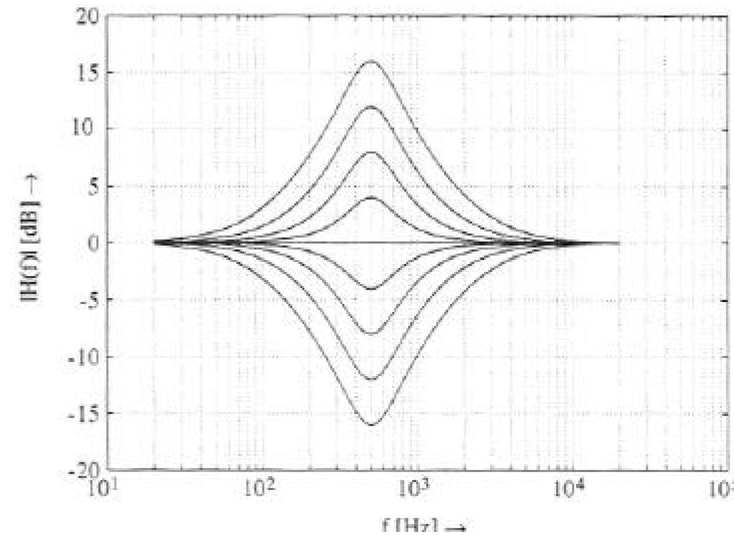


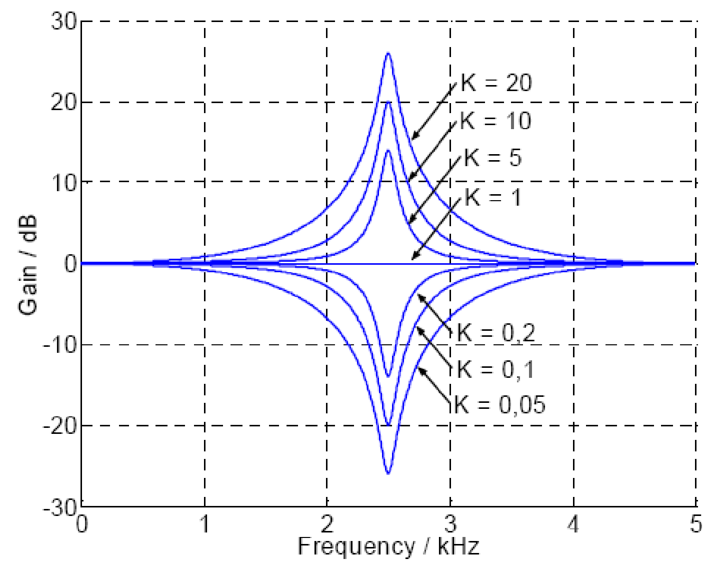
Ekvalisaatori amplituudikarakteristik

Riba laius muutub



Võimendus muutub

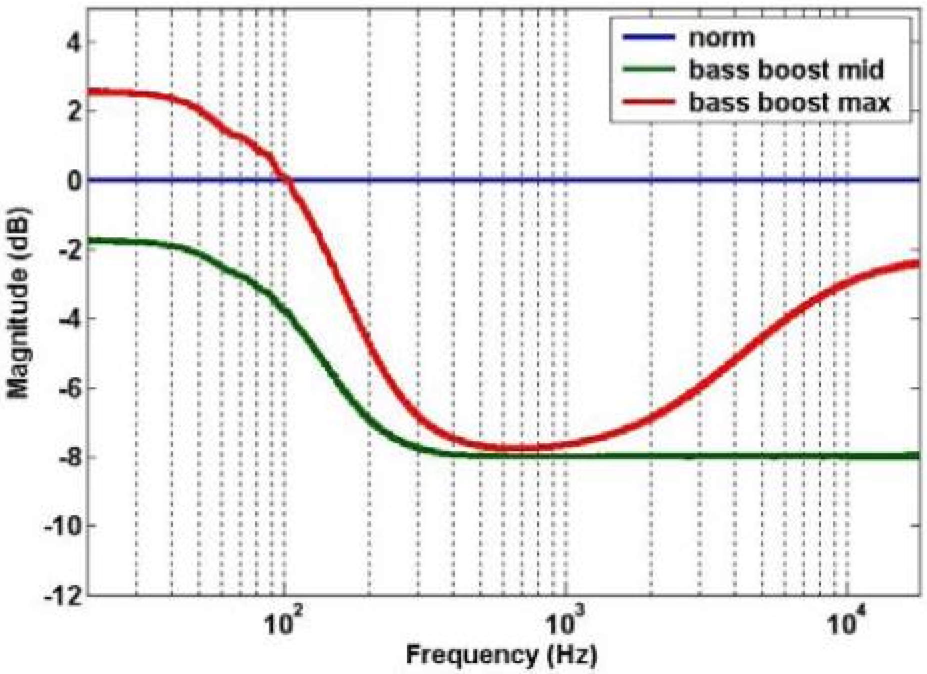




DEMO!

Rakendus: CD-mängija ekvalisaator

Sony walkman D-345: kolm fikseeritud asetust heli värvi muutmiseks

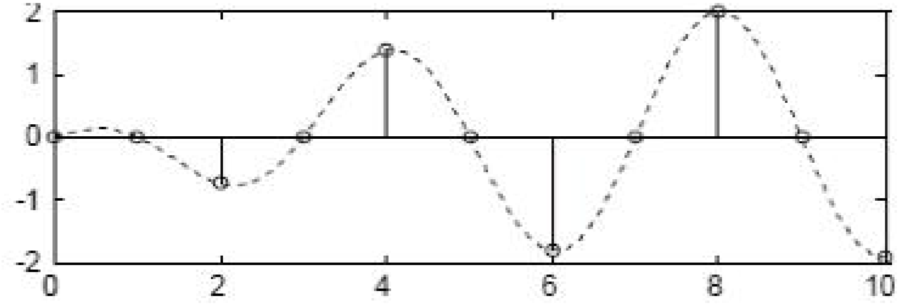


Diskreetimisperioodist väiksem hilistus (murdhilistus)

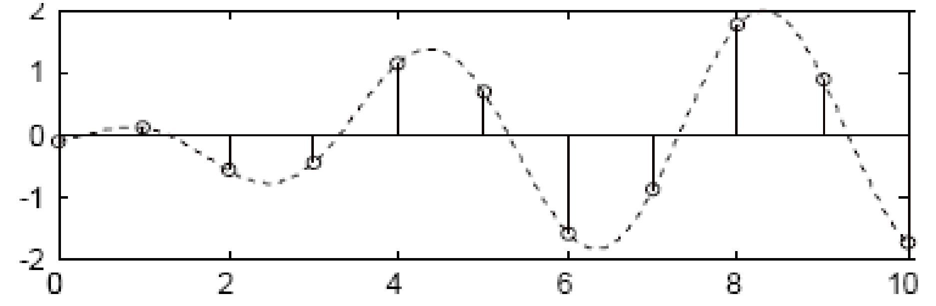
Murdhilistus *(fractional delay)* on diskreetimisperioodist väiksem hilistus ja see leiab kasutust mitmetes helisignaalide algoritmides, näiteks:

- diskreetimissageduste vahelised teisendused
- helisüntees ja efektid (näiteks kammfiltri hilistusahelas)
- doppler-efekt virtuaaltegelikkuse rakendustes

Murdhilistus realiseeritakse interpoleerimise teel. Sealjuures kasutatavat digitaalset filtrit kutsutakse *murdhilistus-filtriks.*



hilistus 0.3 korda diskreetimisperiood

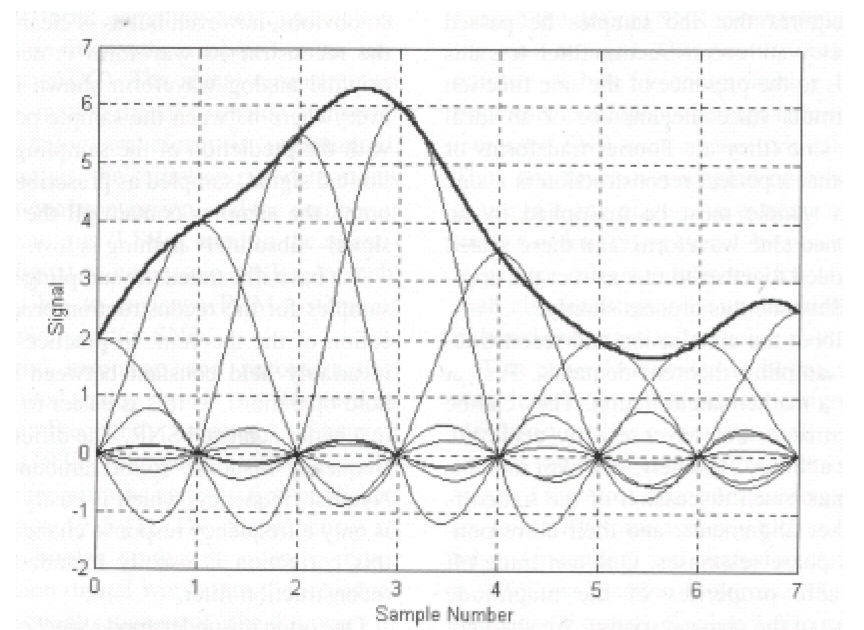


Ideaalne murdhilistusfilter

Ideaalne murdhilistusfilter põhineb samal põhimõttel kui analoogse signaali taastamine diskreetide põhjal – *sinc* funktsiooni rakendamisel iga diskreedi kohale ja summeerimisel. Ideaalsel puhul *sinc* funktsioone oleks vaja lõpmatu hulk.

Digitaalne filter mis sellise operatsiooni teostab, ongi lõpmatu *sinc* funktsiooni kujulise impulss-karakteristikuga filter:

$$h_{id}(n) = \frac{\sin(\pi(n-D))}{\pi(n-D)} = \mathrm{sinc}(n-D)$$



kus *D* on hilistus

Sellist filtrit pole praktiliselt võimalik realiseerida lõpmatu impulsskarakteristiku tõttu

Murdhilistusfilter polünoomiga aproksimeerides

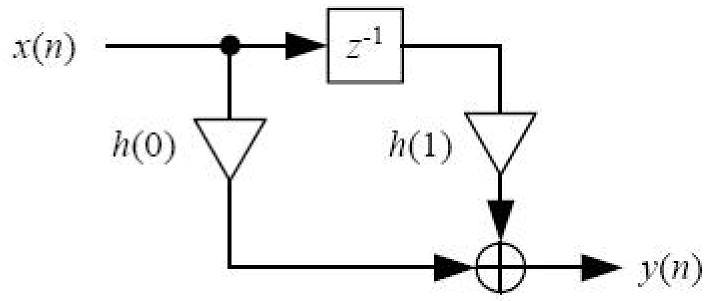
Kenasti toimiv moodus on sobitada läbi diskreetide polünoom-funktsioon ja leida uue hilistatud signaali diskreetide väärtused selle polünoomi põhjal.

Osutub et polünoomiga aproksimeerimise teostab filter, mille kordajad avalduvad:

$$h(n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{N} \frac{D-k}{n-k} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

Siin *N* on polünoomi järk.

Taolist interpoleerimist nimetatakse *Lagrange*-interpoleerimiseks.



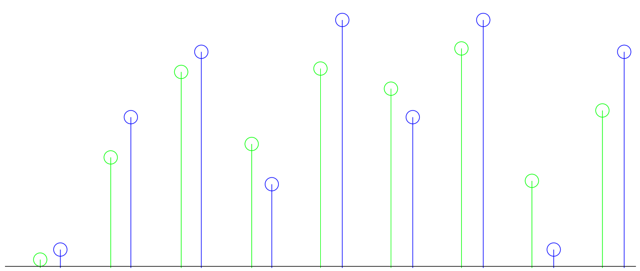
Näide: *N = 1, lineaarne interpoleerimine*

(diskredid 'ühendatakse' sirgega)

originaal: sinine

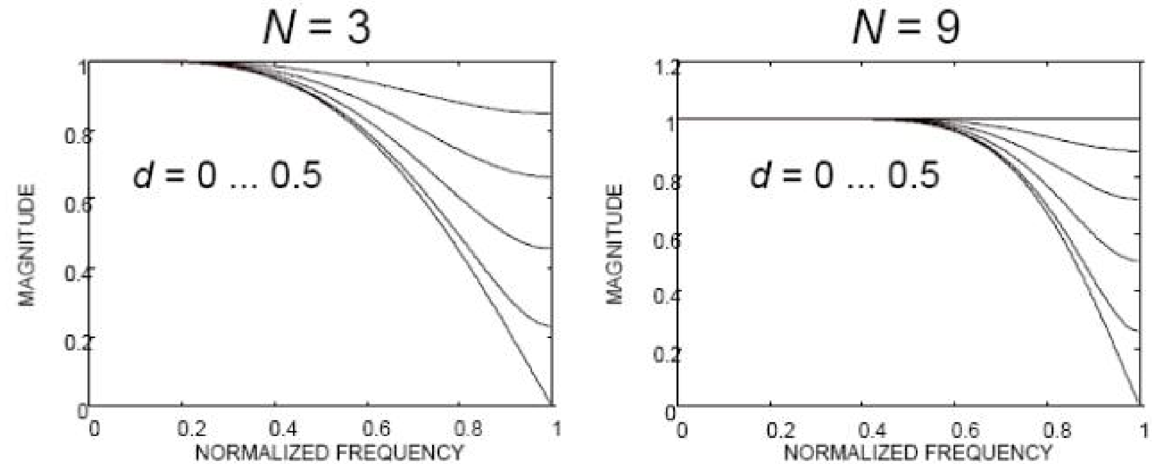
hilistatud 0.3T: roheline

h = [(1-D) D]

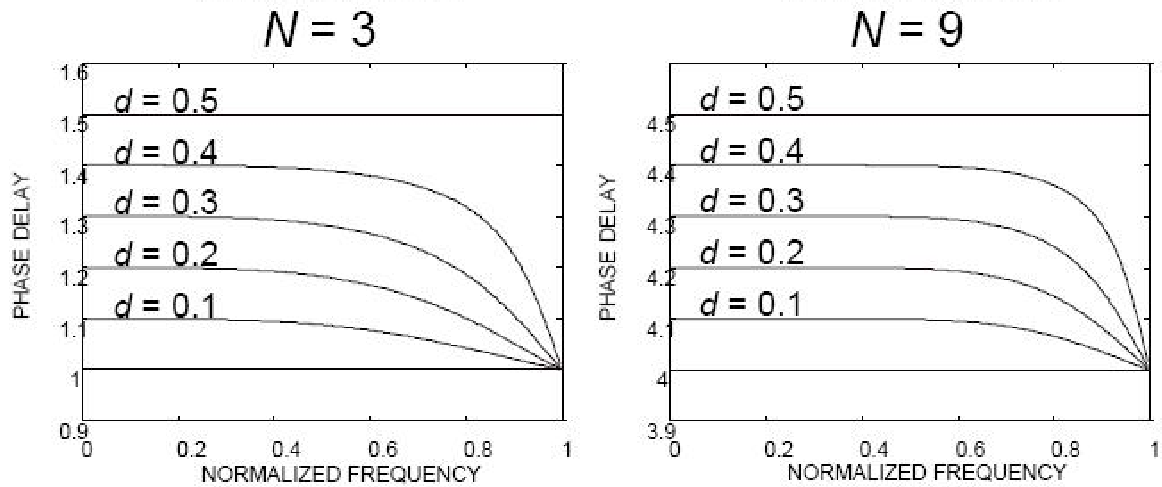


Lagrange-interpolaatori omadused

Amplituudikarakteristik:



Faasikaraktersitik:



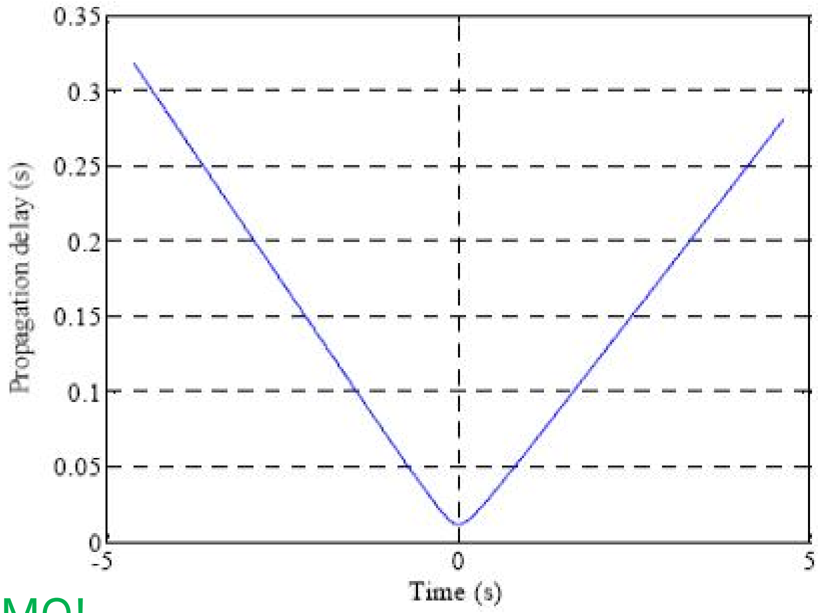
Meetodi puudusena on amplituudi vähenemine kõrgetel sagedustel. Ka faasikarakteristik on kõrgetel sagedustel ebalineaarne => hilistus ei ole õige

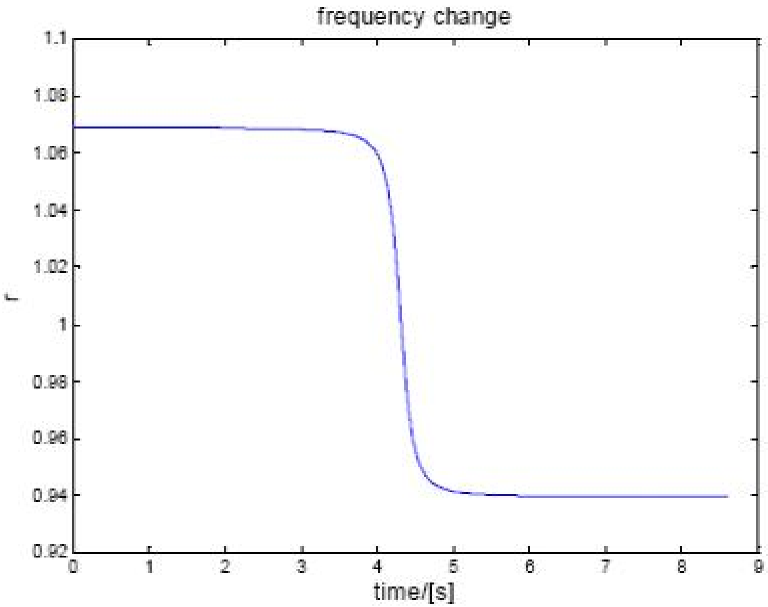
Doppler-efekt

Murdhilistuse abil on võimalik näiteks simuleerida doppler-efektist põhjustatud sagedus muutumist. Kui kuulaja liigub kiirusega v_k ja heli allikas kiirusega v_l siis kuulaja jaoks heli sagedus moonutub järgmise reegli järgi:

$$f = f_0 \frac{v + v_k}{v - v_l}$$

Näide: kiirusega 80 km/h sõitev auto, kui kuulaja on 4 m kaugusel teest:



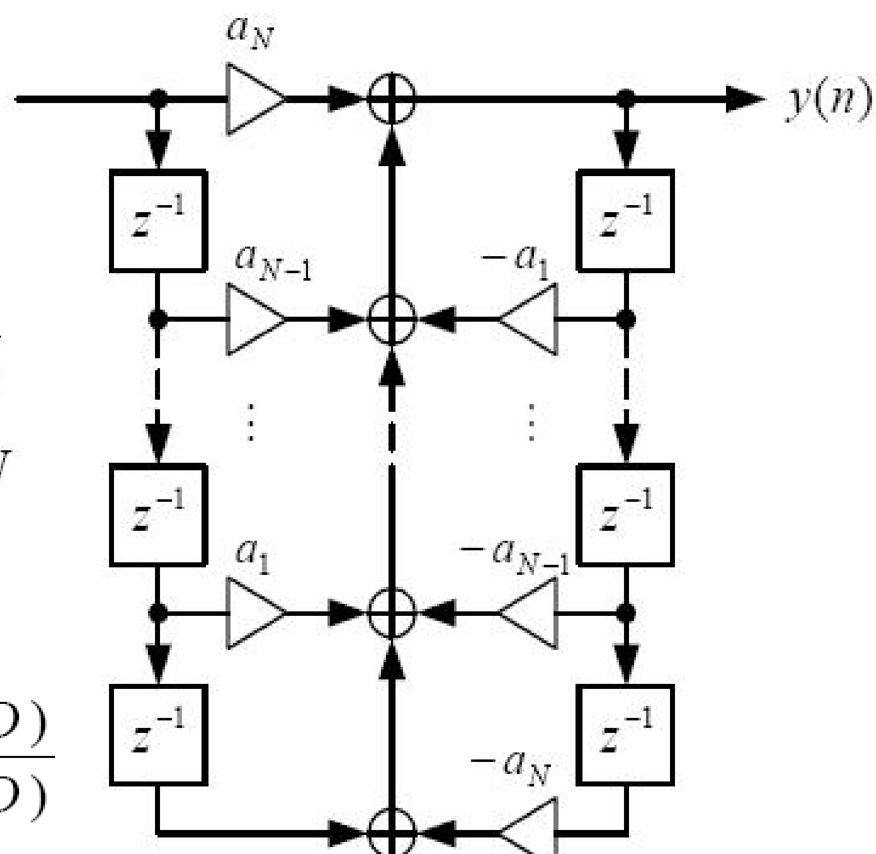


DEMO!

All-pass filtrid murdhilistusfiltritena

All-pass filtrid sobivad hästi murdhilistusfiltriteks kuna neil on konstantne amplituudikarakteristik ja reguleeritav faasikarakteristik.

Disain põhineb faasikarakteristikul.



Lihtsamaid variante on Thiran'i *all-pass* filter:

$$a_k = (-1)^k \binom{N}{k} \prod_{n=0}^{N} \frac{D-N+n}{D-N+k+n}$$

$$\text{for} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, N$$

Näiteks kui *N* = *2:*

$$a_1 = 2\frac{2-D}{1+D}, \quad a_2 = \frac{(1-D)(2-D)}{(1+D)(2+D)}$$

J.–P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," *IEEE Trans. Circ. Theory*, vol. 18, no. 6, pp. 659–664, Nov. 1971.

1. järku Thiran'i filter

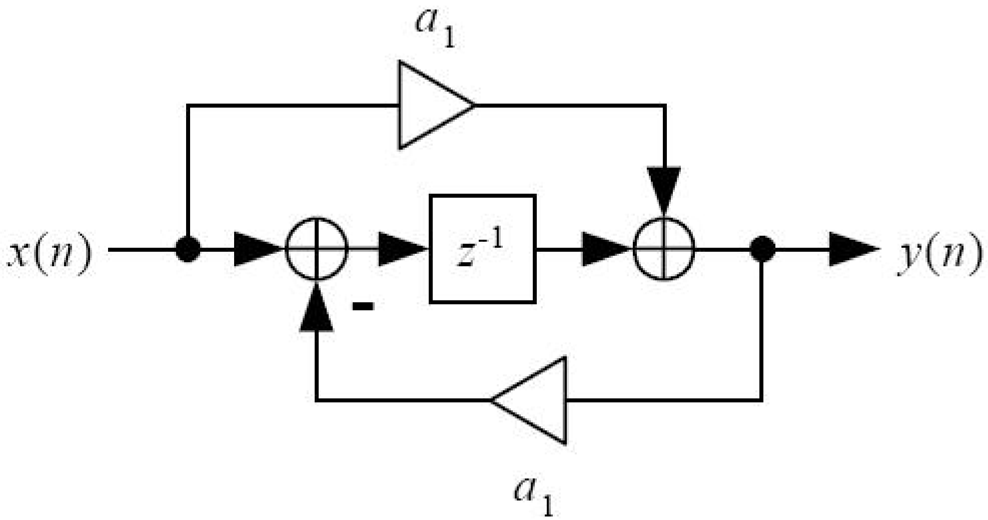
Valem kordaja a_1 jaoks:

$$a_1 = \frac{1 - D}{1 + D}$$

Diferentsvõrrand on:

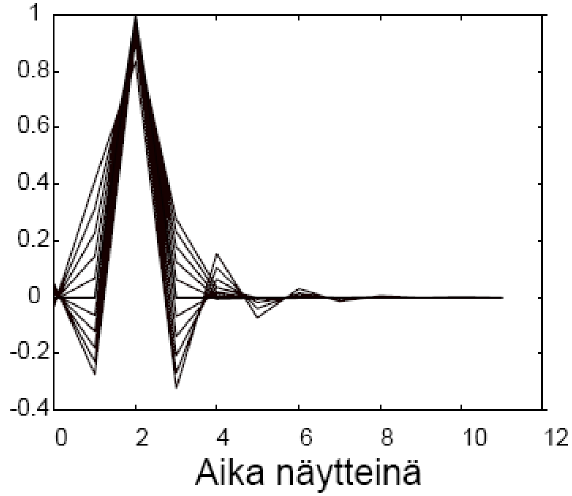
$$y(n) = a_1 x(n) + x(n-1) - a_1 y(n-1)$$

Omalaadse efekti võime saad kui filtreerime mitmeid kordi (> 100) järjest Tiran'i filtriga. Faasihilistus madalatel ja kõrgetel sagedustel erineb oluliselt.



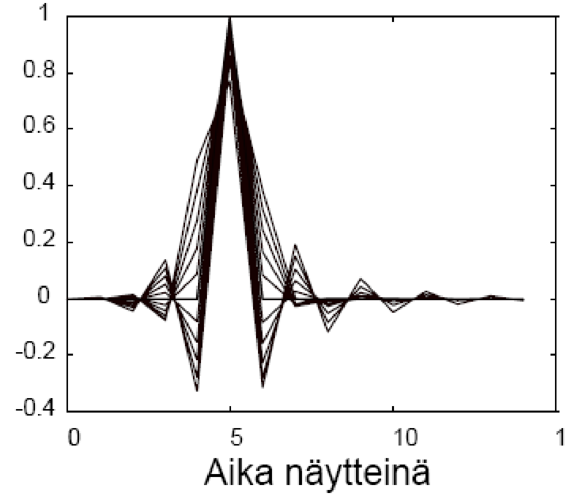
Thiran'i filtri karakteristikuid

N = 2



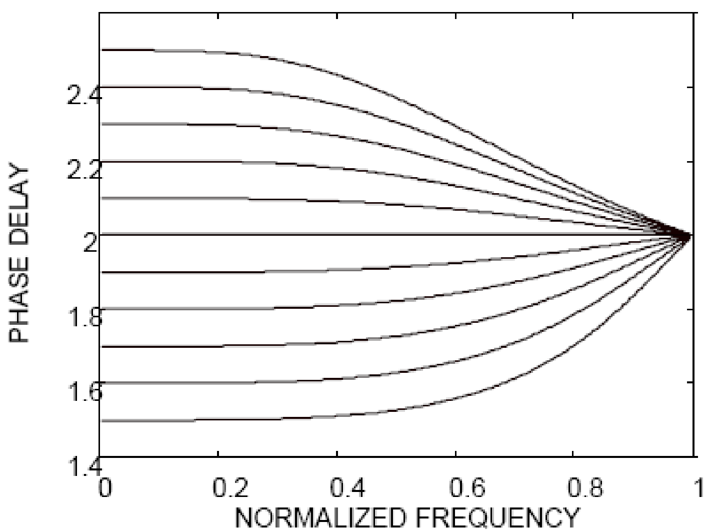
d = -0.5 … 0.5

N = 5



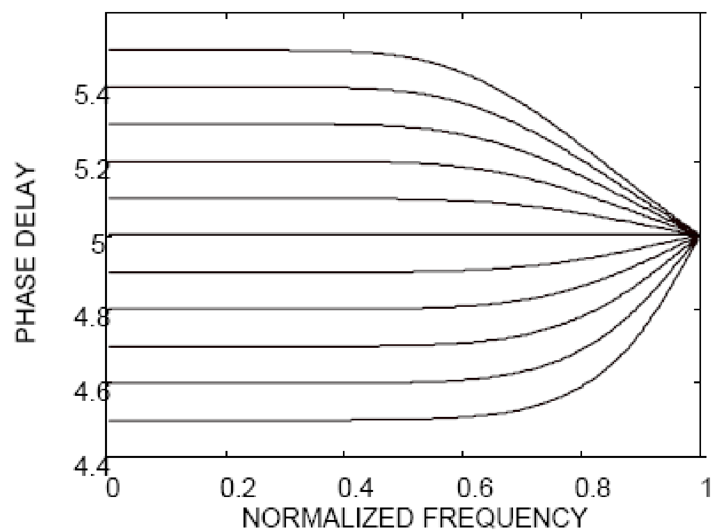
d = -0.5 … 0.5

N = 2



d = -0.5 … 0.5

N = 5



d = -0.5 … 0.5